



ce
pre
UNI

Trigonometría

**CICLO
PRE 2024 - I**

ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR II

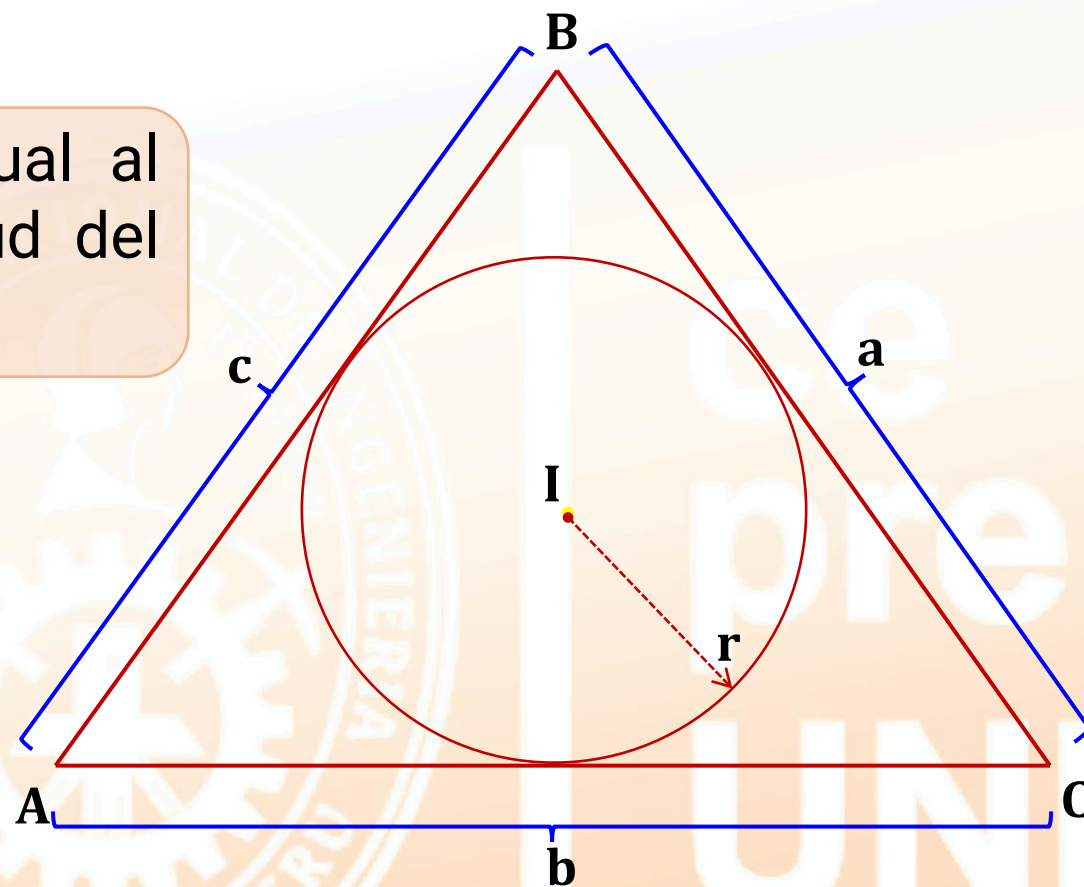


Utilizando la longitud del inradio y el semiperímetro

TEOREMA

El área de una región triangular es igual al producto del semiperímetro y la longitud del inradio del triángulo.

$$S_{ABC} = pr$$



Demostración:

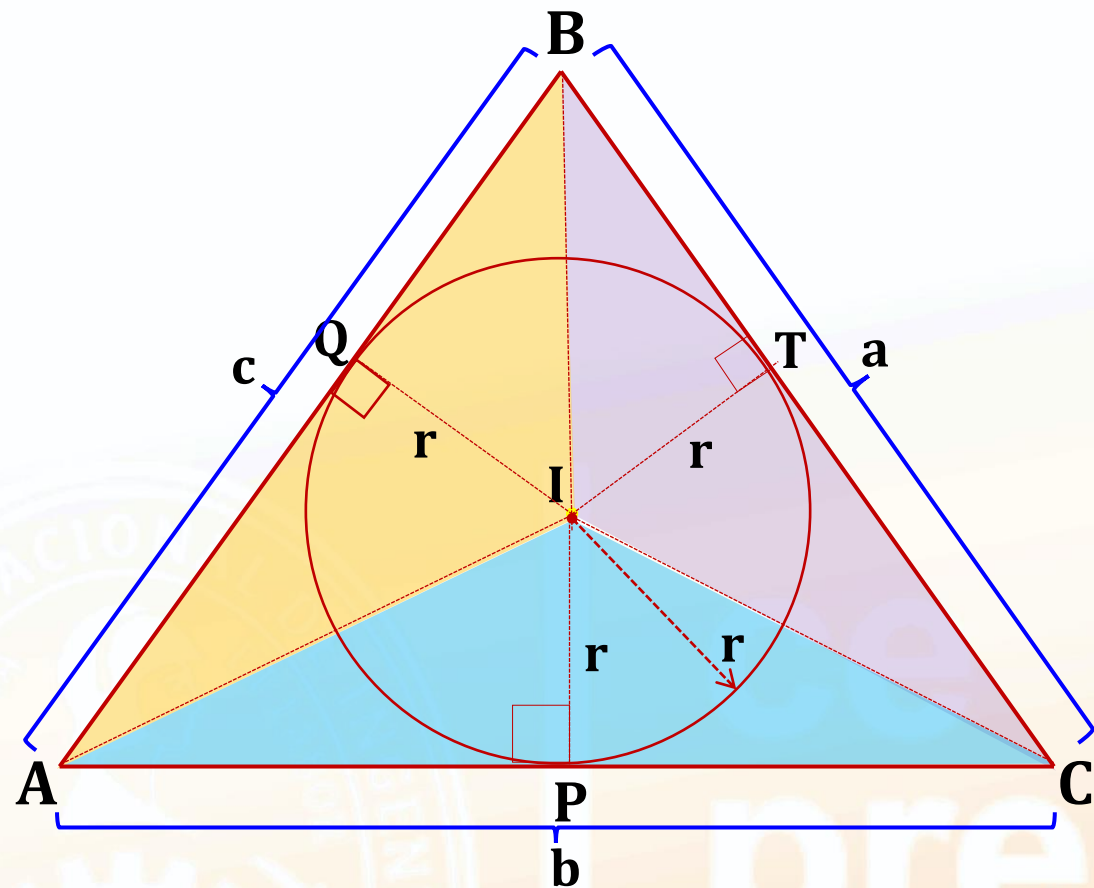
Note que:

$$S_{ABC} = S_{AIC} + S_{AIB} + S_{BIC}$$

$$S_{ABC} = \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{(b+c+a)r}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{(2p)r}{2}$$

$$\therefore S_{ABC} = pr$$



Observación:

Dado que

$$p = 4R \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\rightarrow S_{ABC} = 4Rr \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)$$



PROBLEMA 01

Calcule el área de una región triangular (en u^2) donde la suma de los senos de los ángulos internos de dicho triángulo es igual a $2/3$ y además el producto de su inradio y circunradio es $20 u^2$.

A) $20/3$

B) $28/3$

C) $35/3$

D) $40/3$

E) $50/3$

CLAVE: D

Utilizando el semiperímetro, la longitud de uno de sus lados y la medida del ángulo opuesto a dicho lado.

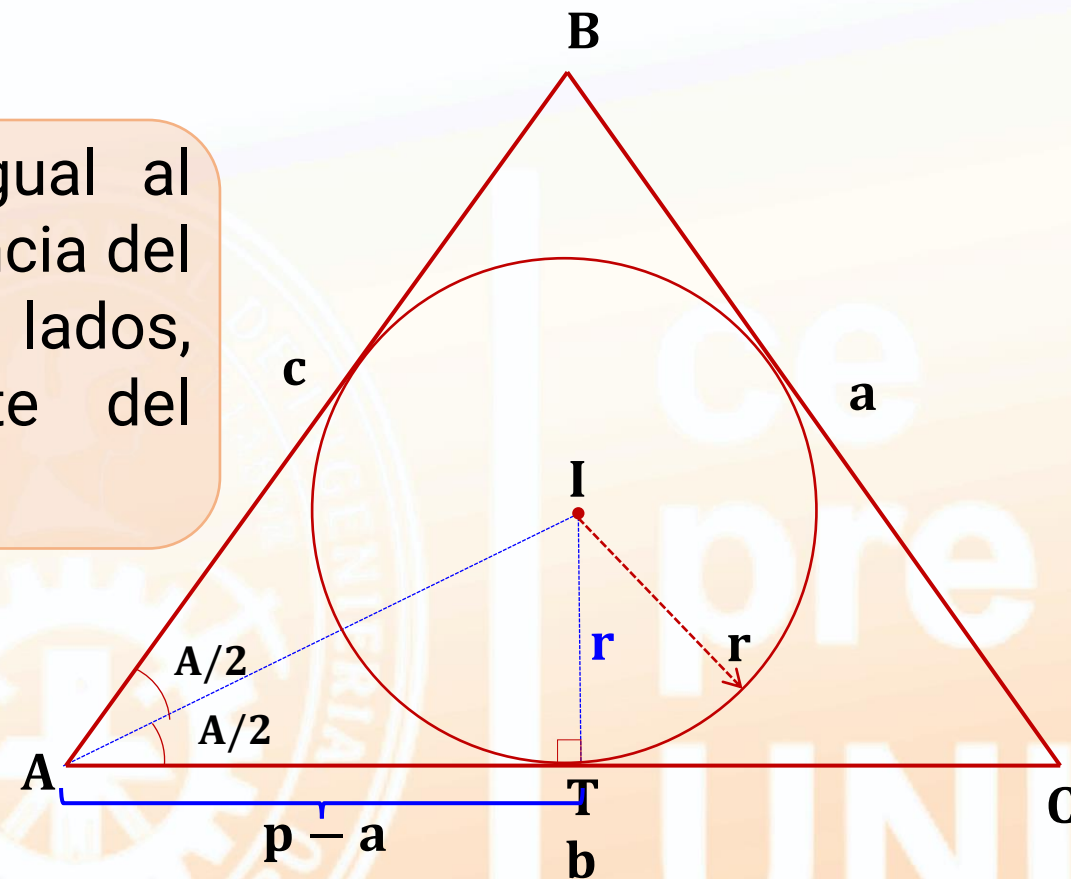
TEOREMA

El área de una región triangular es igual al producto del semiperímetro con la diferencia del semiperímetro y la longitud de uno de sus lados, ambos multiplicados con la tangente del semiángulo opuesto a dicho lado.

$$S_{ABC} = p(p - a)\tan\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$S_{ABC} = p(p - b)\tan\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$S_{ABC} = p(p - c)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$$



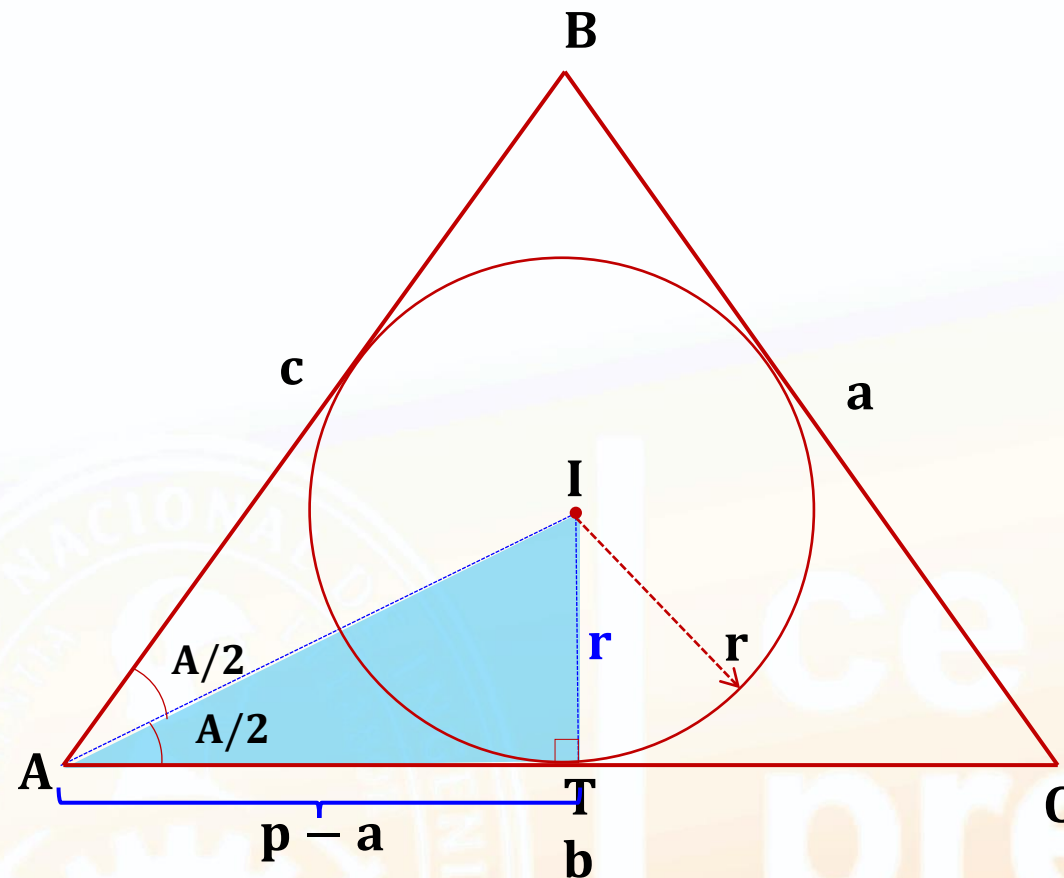
Demostración:

En $\triangle ABC$: $AT = p - a$

En $\triangle ATI$: $r = (p - a)\tan\left(\frac{A}{2}\right)$

Como: $S_{ABC} = pr$

$$\therefore S_{ABC} = p(p - a)\tan\left(\frac{A}{2}\right)$$



PROBLEMA 02

En un triángulo ABC, de lados $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, si S es el área de la región triangular ABC, el semiperímetro es p y el circunradio es R , además se cumple

$$2p(p - a) \cdot R^2 \sin(A) = a^2 S$$

Calcule $\tan(A)$

A) $2 - \sqrt{3}$

B) $1/2$

C) $\sqrt{3}/3$

D) 1

E) $\sqrt{3}$

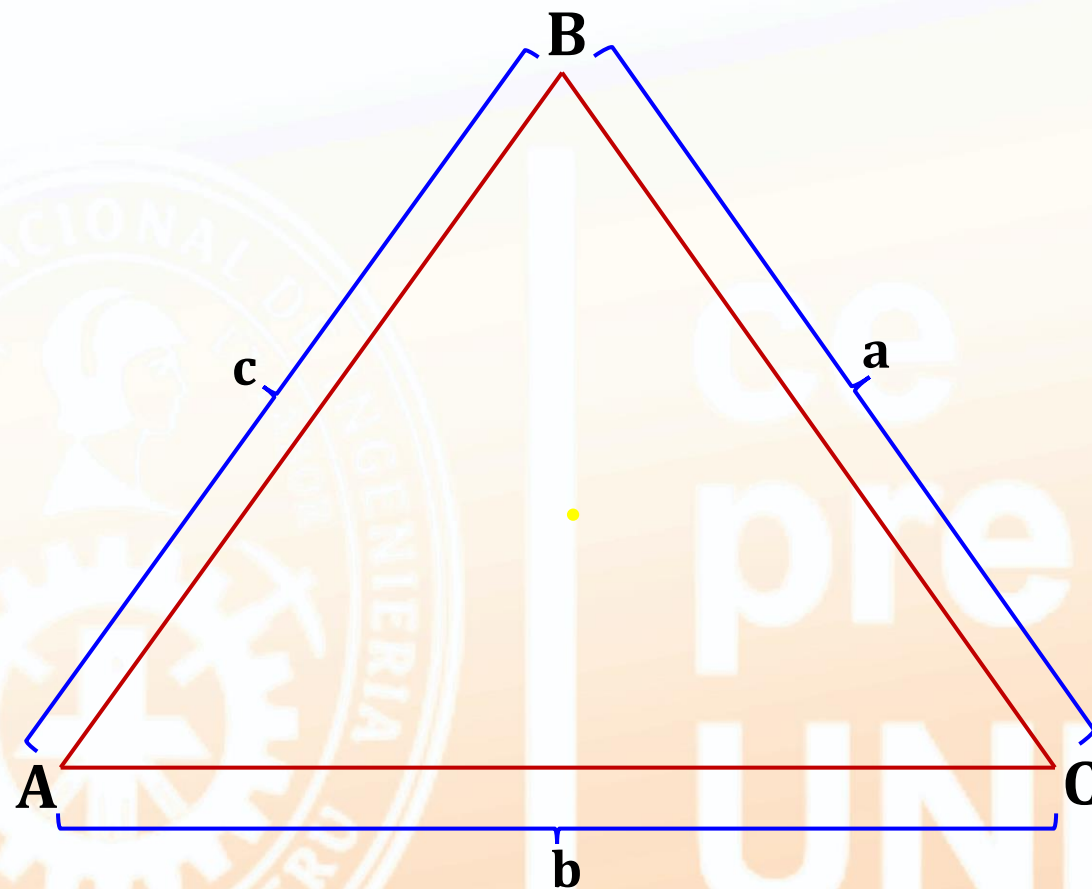
CLAVE: E

Utilizando el semiperímetro y las medidas de los semiángulos del triángulo.

TEOREMA

El área de una región triangular es igual al producto del semiperímetro al cuadrado con las tangentes de las medidas de sus semiángulos internos.

$$S_{ABC} = p^2 \tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right)$$



Demostración:

Sabemos que:

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= p(p-a)\tan\left(\frac{A}{2}\right) \\ S_{ABC} &= p(p-b)\tan\left(\frac{B}{2}\right) \\ S_{ABC} &= p(p-c)\tan\left(\frac{C}{2}\right) \end{aligned} \right\} \text{ (Multiplicando)}$$

$$(S_{ABC})^3 = p^2 \cdot \underbrace{p(p-a)(p-b)(p-c)}_{(S_{ABC})^2} \tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

→ $S_{ABC} = p^2 \tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right)$

Pero: $S = p^2 \tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right) = pr$

$$r = p \tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$p = r \cot\left(\frac{A}{2}\right) \cot\left(\frac{B}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

PROBLEMA 03

El perímetro de un triángulo ABC es 36 cm y se cumple que

$$\cot\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{B}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right) = 12$$

Calcule el área de dicha región triangular.

A) 18

B) 24

C) 27

D) 30

E) 36

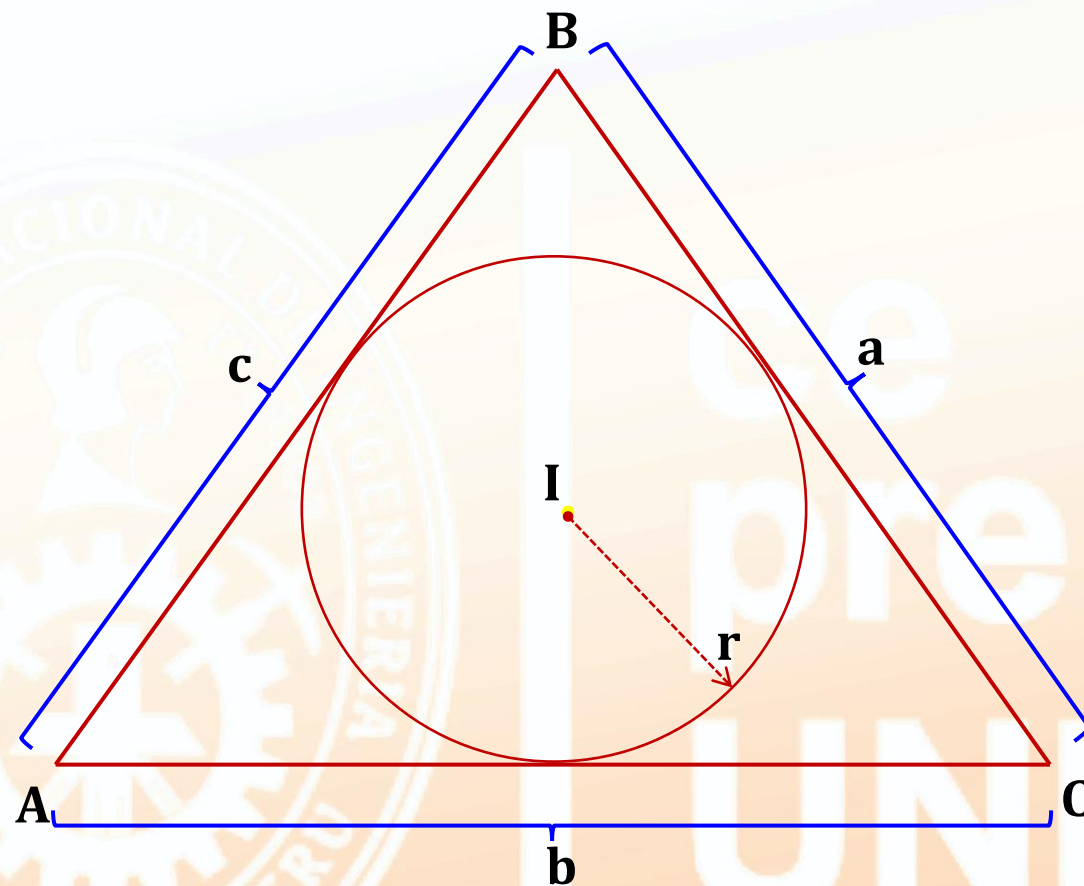
CLAVE: C

Utilizando la longitud del inradio y las medidas de los semiángulos del triángulo.

TEOREMA

El área de una región triangular es igual al producto del cuadrado de la longitud del inradio con las cotangentes de los semiángulos internos del triángulo.

$$S_{ABC} = r^2 \cot\left(\frac{A}{2}\right) \cot\left(\frac{B}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$$



PROBLEMA 04 (material de estudios , prob. 169)

En un triángulo ABC, de lados ($AB=c$, $BC=a$, $AC=b$), se cumple

$$\frac{3r^2 \cos \left(\frac{A}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{A}{2} \right) + \sin \left(\frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{C}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{A}{2} \right) \sin \left(\frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{C}{2} \right)} = kS$$

Donde S es el área de la región triangular y r el inradio, calcule el valor de k.

A) $\frac{1}{2}$

B) 2

C) 1

D) 3

E) 4

CLAVE: D

PROBLEMA 05 (material de estudios , prob. 170)

En un triángulo ABC, se cumple

$$\cot\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{B}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right) = m$$

Y el inradio $r = \sqrt{7} \text{ u}$. Calcule el área de la región triangular ABC en (u^2).

A) 3m

B) 4m

C) 5m

D) 6m

E) 7m

CLAVE: E

Utilizando el semiperímetro, la longitud de un lado y el exradio relativo a este.

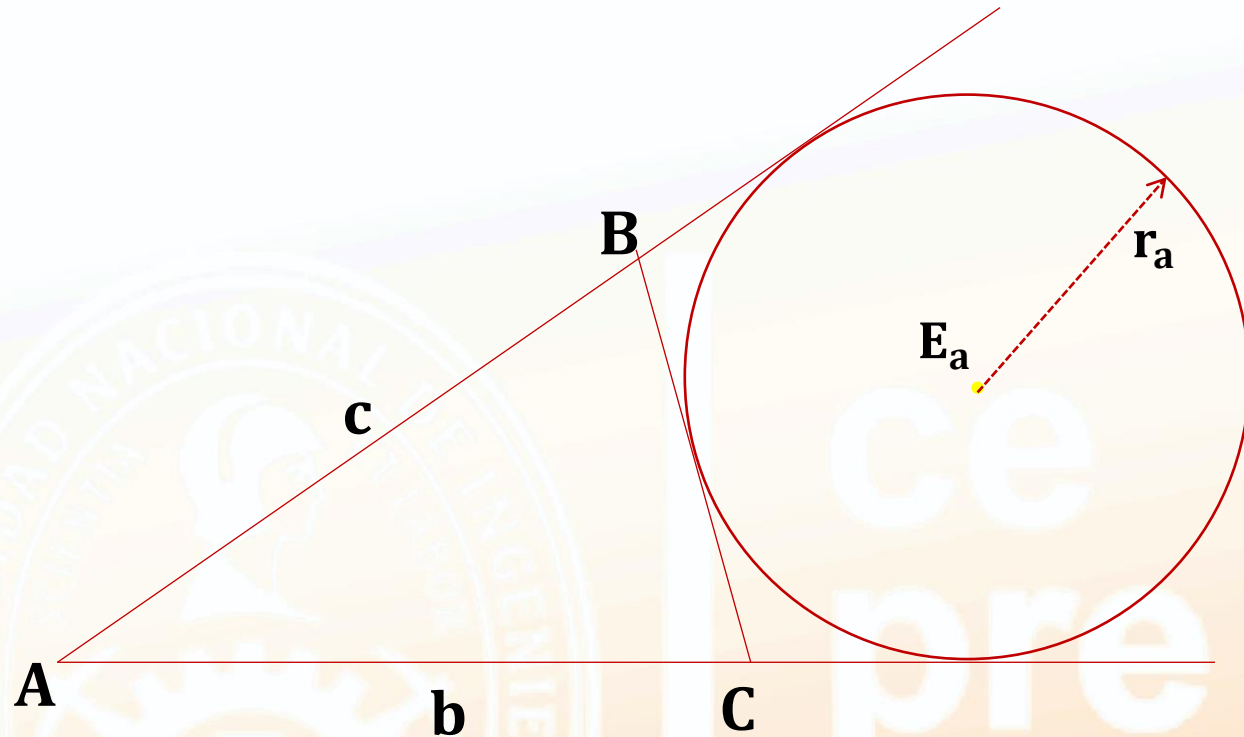
TEOREMA

El área de una región triangular es igual al producto de la diferencia del semiperímetro y la longitud de uno de sus lados con su exradio correspondiente.

$$S_{ABC} = (p - a)r_a$$

$$S_{ABC} = (p - b)r_b$$

$$S_{ABC} = (p - c)r_c$$



Demostración:

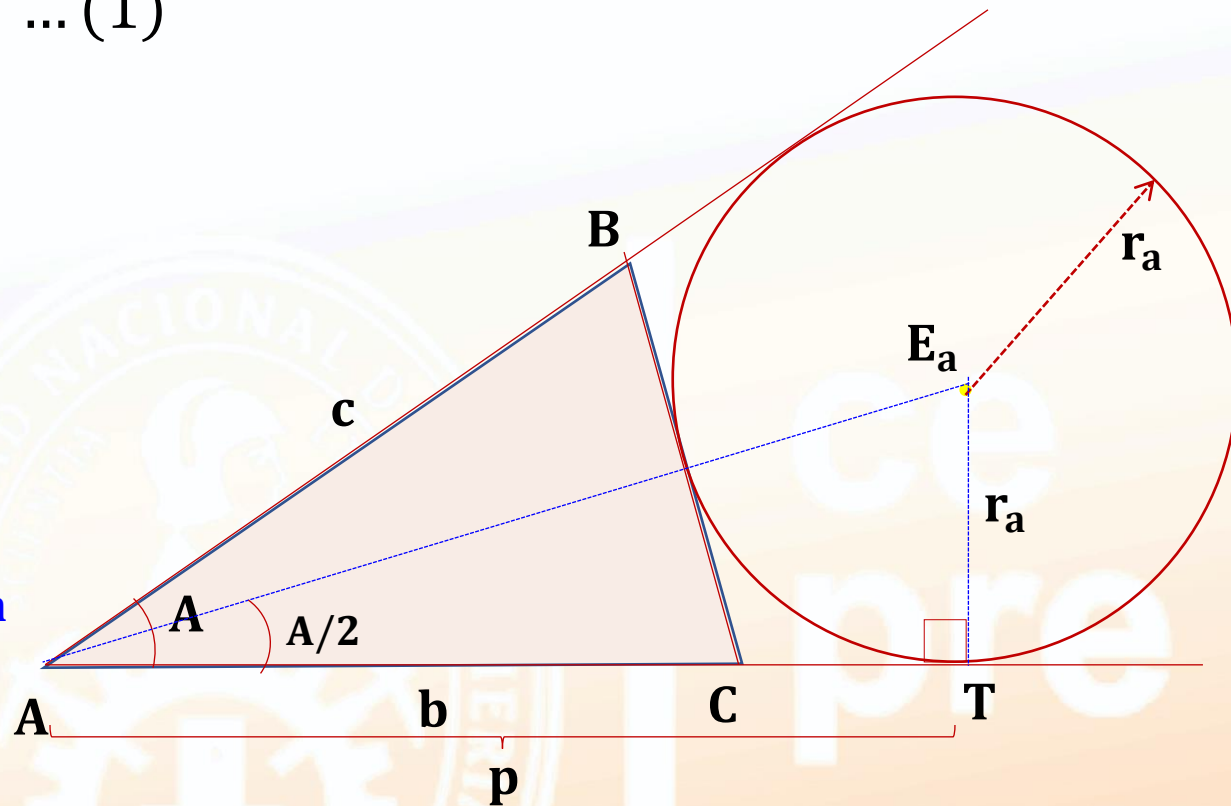
Se conoce: $S_{ABC} = p(p - a)\tan\left(\frac{A}{2}\right) \dots (1)$

En el $\triangle ATE_a$: $r_a = p \tan\left(\frac{A}{2}\right)$

En (1):

$$S_{ABC} = (p - a) p \tan\left(\frac{A}{2}\right) = (p - a)r_a$$

$$\therefore S_{ABC} = (p - a)r_a$$



PROBLEMA 06

En un triángulo ABC, las longitudes de los exradios relativos a los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son r_a , r_b y r_c , respectivamente y r es la longitud del inradio.

Simplifique:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r}$$

A) $-1/2$

B) -1

C) 0

D) 1

E) $1/2$

CLAVE: C

PROBLEMA 07

En un triángulo ABC, $AB = cu$, $BC = au$ y $AC = bu$, las longitudes de los exradios relativos a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son $r_a u$ y $r_b u$, respectivamente.

Si se cumple: $2r_a = 3r_b$, calcule el valor de:

$$\frac{a - b}{c}$$

A) $1/2$

B) $1/3$

C) $1/4$

D) $1/5$

E) $1/6$

CLAVE: D

Por otra parte, tengamos en cuenta lo siguiente:

Como: $r_a = p \tan\left(\frac{A}{2}\right) \wedge r_b = p \tan\left(\frac{B}{2}\right)$

Entonces: $r_a r_b = p^2 \tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right)$

multiplicando por $\tan\left(\frac{C}{2}\right)$:

$$\Rightarrow r_a r_b \tan\left(\frac{C}{2}\right) = \overbrace{p^2 \tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right)}^S$$

$$\therefore S = r_a r_b \tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

Análogamente:

$$S = r_b r_c \tan\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$S = r_a r_c \tan\left(\frac{B}{2}\right)$$

PROBLEMA 08 (6ta PC CEPRE UNI 2019-I)

En un triángulo ABC ($AB = c, AB = c, BC = a$), r_a y r_b son las longitudes de los exradios relativos a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si se cumple que $2r_a r_b = ab$; calcule la medida del ángulo C.

A) 30° B) 60° C) 45° D) 90° E) 135° **CLAVE: D**

Utilizando las longitudes del inradio y los exradios.

TEOREMA

El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes del inradio y de los exradios del triángulo.

$$S_{ABC} = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

Demostración:

Sabemos que:

$$S_{ABC} = pr$$

$$S_{ABC} = (p - a)r_a$$

$$S_{ABC} = (p - b)r_b$$

$$S_{ABC} = (p - c)r_c$$

(multiplicando)

$$(S_{ABC})^4 = \underbrace{p(p - a)(p - b)(p - c) \cdot r r_a r_b r_c}_{(S_{ABC})^2}$$

$$\therefore S_{ABC} = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

PROBLEMA 09

Con los exradios r_a , r_b y r_c , de un triángulo, determine la expresión equivalente a

$$\frac{(r_a r_b r_c)^2}{\cot\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{B}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right)}$$

A) $3S^3$

B) $2S^3$

C) S^3

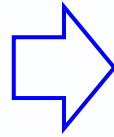
D) $S^3/2$

E) $S^3/3$

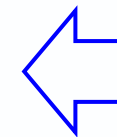
CLAVE: C

OBSERVACIÓN

$$r = (p - a) \tan \left(\frac{A}{2} \right)$$



$$\begin{aligned} r_a - r &= a \tan \left(\frac{A}{2} \right) \\ r_b - r &= b \tan \left(\frac{B}{2} \right) \\ r_c - r &= c \tan \left(\frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$



$$r_a = p \tan \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$r = p \tan \left(\frac{A}{2} \right) \tan \left(\frac{B}{2} \right) \tan \left(\frac{C}{2} \right)$$

$$p = 4R \cos \left(\frac{A}{2} \right) \cos \left(\frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{C}{2} \right)$$

$$r = 4R \sin \left(\frac{A}{2} \right) \sin \left(\frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{C}{2} \right)$$

$$r_a - r = 4R \sin^2 \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$r_a + r_b = 4R \cos^2 \left(\frac{C}{2} \right)$$

$$r_a = 4R \sin \left(\frac{A}{2} \right) \cos \left(\frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{C}{2} \right)$$

$$r_b = 4R \sin \left(\frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{A}{2} \right) \cos \left(\frac{C}{2} \right)$$

$$r_c = 4R \sin \left(\frac{C}{2} \right) \cos \left(\frac{A}{2} \right) \cos \left(\frac{B}{2} \right)$$

**PROBLEMA 10 (6ta PC CEPRE UNI 2019-II)**

En un triángulo ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) de perímetro $2p$, circunradio de longitud R y área de su región triangular S ; indique el equivalente de

$$\frac{\sec\left(\frac{B}{2}\right) \sec\left(\frac{C}{2}\right)}{4R \cdot (p - a) \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

A) S^2

B) S^{-2}

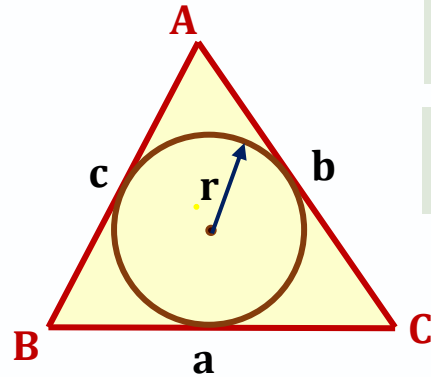
C) S

D) S^{-1}

E) S^{-3}

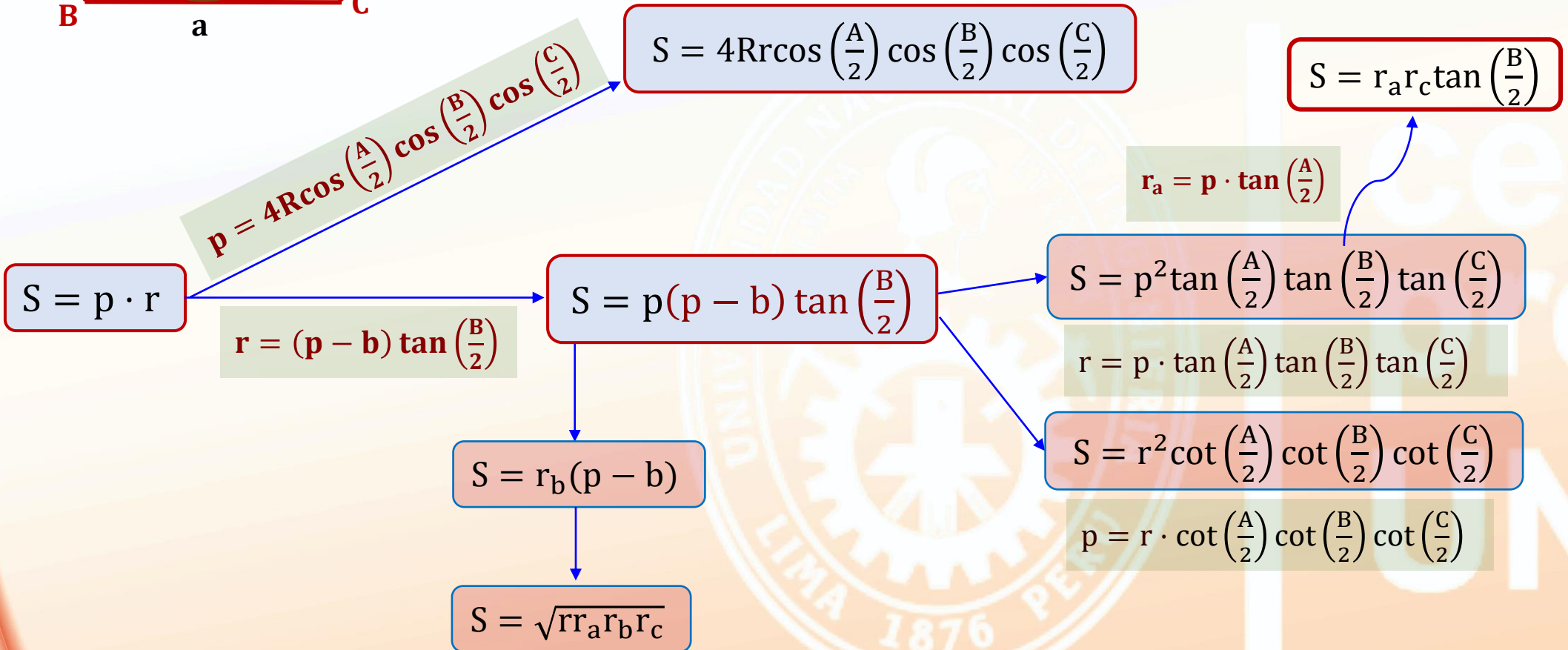
CLAVE: D

RESUMEN:



$$r = (p - b) \tan \left(\frac{B}{2} \right)$$

$$r_b = p \cdot \tan \left(\frac{B}{2} \right)$$





PROBLEMA 11

En un triángulo ABC, r es la longitud del inradio, R es la longitud del circunradio y S es el área de la región triangular ABC. Determine, en términos de S , la expresión:

$$r \cos \left(\frac{A}{2} \right) \left[r \csc \left(\frac{A}{2} \right) + 4R \sin \left(\frac{A}{2} \right) \right]$$

- A) $S/8$ D) S
B) $S/4$ E) $2S$
C) $S/2$

CLAVE: D

PROBLEMA 12

En un triángulo ABC ($BC = a$; $AC = b$; $AB = c$) en (u) , r u es la longitud del inradio del triángulo ABC.

Halle el equivalente de: $r \left[\cot \left(\frac{A}{2} \right) + \cot \left(\frac{C}{2} \right) \right]$

- A) a B) b C) c D) $a + b + c$ E) 1

CLAVE: B

PROBLEMA 13

En un triángulo ABC la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AC}$ en T, tal que: $AT = m$; $TC = n$, en u. Si la medida del ángulo ABC es θ , calcule el área de dicha región triangular, en u^2 .

- A) $\frac{mn}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ B) $m \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $\frac{mn}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ D) $m \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ E) $\frac{mn}{2} \sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

CLAVE: D

PROBLEMA 14

En un triángulo ABC ($BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ en cm), p es el semiperímetro, r cm es el inradio. Calcule el área de la respectiva región triangular, en cm^2 , si:

$$p^4 r(p - a) = 125 \cot^2\left(\frac{A}{2}\right) \cot\left(\frac{B}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 5 D) 6 E) 10

CLAVE: C

PROBLEMA 15 (6ta PC CEPRE UNI 2019-I)

Calcule el área de la región triangular ABC, si $AB = c$, r_a y r_b son los exradios relativos a los lados BC y AC respectivamente y se cumple que

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = c$$

A) 0,5

B) 1,0

C) 1,5

D) 2,0

E) 2,5

CLAVE: B

PROBLEMA 16

Con los exradios r_a , r_b y r_c , de un triángulo, determine la expresión equivalente a

$$\frac{4r_a r_b r_c}{\text{sen}(A) + \text{sen}(B) + \text{sen}(C)}$$

en términos del área de la región triangular S y del circunradio R .

A) SR B) $2SR$ C) $4SR$ D) $8SR$ E) $16SR$ **CLAVE: C**

PROBLEMA 17

En un triángulo ABC, el área de su región interior es S ; r_a, r_b y r_c representan las longitudes de los exradios relativos a los lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

Expresa

$$\frac{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}{\cot\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{B}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right)}$$

en términos de S .

A) $\frac{S}{4}$

B) $\frac{S}{2}$

C) S

D) $2S$

E) $4S$

CLAVE: C

PROBLEMA 18

En un triángulo ABC escaleno, ($BC = a$, $AB = c$ y $AB = c$ en u), cumpliéndose que:

$$p(p - a) \left(4 \cos \left(\frac{A}{2} \right) \cos \left(\frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{C}{2} \right) - \sin(A) - 2\sin(C) \right) = 12(\sin(B) + \sin(C)) \tan \left(\frac{B - C}{2} \right)$$

Calcular el área (en u^2) de la región triangular ABC.

A) 6

B) 9

C) 12

D) 18

E) 36

CLAVE: C